УДК 517.524

Любимому папе посвящаю

Новая цепная дробь для $\zeta(5)$

Автор предложил новую формулу разложения в цепную дробь для $\zeta(5)$.
Ключевые слова: непрерывная дробь, цепная дробь, $\zeta(5)$.

В статье [1] приведена и доказана формула для $\zeta(5)$, которую запишем в очевидном виде так:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A(k) = -380928\zeta(5), \text{где}$$

$$A(k) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^9} \times \frac{1024^{k+1}}{5^{5k+5}} \times$$

$$\frac{\left(\prod_{p=0}^{k}(p+1)\right)^9 (5532k^4 + 16\,528k^3 + 18\,667k^2 + 9453k + 1812)}{\left(\prod_{p=0}^{k}\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)^5 \left(\prod_{p=0}^{k}\left(p+\frac{1}{5}\right)\right)\left(\prod_{p=0}^{k}\left(p+\frac{2}{5}\right)\right)\left(\prod_{p=0}^{k}\left(p+\frac{3}{5}\right)\right)\left(\prod_{p=0}^{k}\left(p+\frac{4}{5}\right)\right)}$$

Воспользуемся формулой Эйлера

$$\left.\begin{aligned} &C = \sum_{k=0}^{\infty} A(k) = A(0)\left(1 + \frac{1}{T_0 - 1}\right);\ B_k = \frac{A(k)}{A(k+1)} \neq 0 \\ &T_0 = 1 + \frac{A(0)}{C - A(0)} \\ &T_k = 1 + B_k - \frac{B_k}{T_{k+1}} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Имеем

$$B_k = \frac{A(k)}{A(k+1)} = -\frac{3125(k+2)^9}{1024(k+1)^9} \frac{5532k^4 + 16\,528k^3 + 18\,667k^2 + 9453k + 1812}{5532k^4 + 38\,656k^3 + 101\,443k^2 + 118\,499k + 51\,992} \times$$

$$\frac{1}{20\,000}(5k+7)(5k+9)(5k+6)(5k+8)\frac{(2k+3)^5}{(k+2)^9}$$

Или

$$B_k = -\frac{5(2k+3)^5(5k+6)(5k+7)(5k+8)(5k+9)(5532k^4 + 16\,528k^3 + 18\,667k^2 + 9453k + 1812)}{32\,768(k+1)^9(5532k^4 + 38\,656k^3 + 101\,443k^2 + 118\,499k + 51\,992)}$$

Полагая

$$s(k) = 5(2k+3)^5(5k+6)(5k+7)(5k+8)$$

$$(5k+9)(5532k^4 + 16\,528k^3 + 18\,667k^2 + 9453k + 1812)$$

$$c(k) = 32\,768(k+1)^9(5532k^4 + 38\,656k^3 + 101\,443k^2 + 118\,499k + 51\,992)$$

получаем

$$T_k = 1 - \frac{s(k)}{c(k)} - \frac{-\frac{s(k)}{c(k)}}{T_{k+1}}.$$

Пусть $T_k = -\frac{U_k}{c(k)}$, тогда

$$T_0 = -\frac{U_0}{c(0)}$$

$$U_k = s(k) - c(k) + \frac{s(k)c(k+1)}{U_{k+1}}$$

Пусть $R_k = U_{k-1}$, тогда

$$R_k = s(k-1) - c(k-1) + \frac{s(k-1)c(k)}{R_{k+1}}$$

$$R_0 = s(-1) - c(-1) + \frac{s(-1)c(0)}{U_0}$$

$$A(0)\left(1 + \frac{1}{T_0 - 1}\right) = -\frac{1781\,268\,480}{R_0}$$

$$-\frac{1781\,268\,480}{R_0} = -380928 \times \zeta(5)$$

Окончательно имеем

$$R_0 = \frac{144\,960}{31\zeta(5)} = 4509.\,599\,640\,923\,42\ldots$$

$$\zeta(5) = \frac{144\,960}{31R_0}$$

$$R_k = 5(2k+1)^5(5k+1)(5k+2)(5k+3)(5k+4)(5532k^4 - 5600k^3 + 2275k^2 - 425k + 30)$$
$$-32\,768k^9(5532k^4 + 16\,528k^3 + 18\,667k^2 + 9453k + 1812)$$
$$+5 \times 32\,768(k+1)^9(2k+1)^5(5k+1)(5k+2)(5k+3)(5k+4)$$
$$\times\frac{(5532k^4 - 5600k^3 + 2275k^2 - 425k + 30)(5532k^4 + 38\,656k^3 + 101\,443k^2 + 118\,499k + 51\,992)}{R_{k+1}}$$

Чтобы наглядно оценить точность вычисления по приведенным выше формулам, предложен следующий параметр:

α_{1000}, который приблизительно (с точностью до одного-двух знаков) показывает число верных десятичных знаков, полученых за 1000 циклов; например, $\alpha_{1000} = 6,332$ означает, что за 1000 циклов получено, как минимум, 6330 верных знаков искомого числа; то есть, грубо говоря, за один цикл вычисляется 6 верных знаков.

Дело в том, что число вычисленных верных десятичных знаков зависит от количества циклов, причём часто в худшую сторону; например, $\alpha_{1000} = 0,03$ а $\alpha_{100000} = \frac{4}{100000}$.

Но встречаются и такие случаи: $\alpha_{10} = 6,4$ $\alpha_{100} = 9,95$ $\alpha_{1000} = 13,87$ $\alpha_{10000} = 17,87$.

Вычислим число α_{1000} по приведённым выше формулам за 1000 циклов.

$\alpha_{1000} = 0,487$

то есть за 1000 циклов получено, как минимум, 485 верных знаков искомого числа $\zeta(5)$.

Литература

1. Kam Cheong Au(Кам Чон Ау). Wilf-Zeilberger seeds and non-trivial hypergeometric identities. arXiv:2312.14051v4 [math.CO] 10 Oct 2024

S.N. Gladkovskii

New formula for expansion the continued fraction for $\zeta(5)$

The author proposed a new formula of expansions the continued fraction for $\zeta(5)$

Keywords: continued fraction, chain fraction, $\zeta(5)$

Гладковский Сергей Николаевич
E-mail: journaly2010@bk.ru